2021 年度　甲南大学大学院　入試問題

区分	研究科	専攻	試験科目	試験時間	試験日
修士一般	自然科学	物理学	専門	180 分	2021 年 2 月 20 日

注意事項

＊（１）、（２）、（３）、（４）、（５）の５題を全て解答すること。

＊解答用紙は問題ごとに別々の用紙に解答すること。

＊問題は９頁にわたっているので確かめること。

(1)　力学　(１０点)

ばね定数 k の質量が無視でき曲がらないばね OA が原点 O からつるされている。ばねの先には質量 M, 長さ$2a$の一様な棒 AB がつながっている。ばね OA, 棒 AB が鉛直線と平行な状態で静止しているとき，ばね OA の長さは l であった。このばね OA, 棒 AB を鉛直面内で振動させる。運動中のばねと鉛直線のなす角を θ, 棒と鉛直線のなす角を ϕ, ばねの長さを $l+z$とする。また，鉛直下向きをy軸正の向きとし，y軸と垂直で θ, ϕ が増える向きをx軸正の向きとする。重力は鉛直下向きに働き，重力加速度の大きさをgとする。

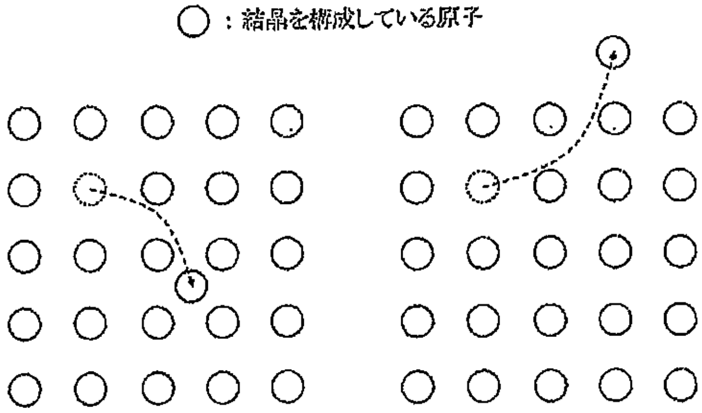
（1）　点 A 周りの棒の慣性モーメントIを求めよ。
（2）　運動中の棒の重心の位置を求めよ。
（3）　棒の運動エネルギーを求めよ。
（4）　ばね OA, 棒 AB が鉛直線と平行で静止しているときを基準とした運動中の位置エネルギーを求めよ。

以下では，運動が微小振動であるとする。

δが小さい時, $cos\delta \sim 1-\frac{1}{2}\delta^2$, $sin\delta \sim \delta$ としてよい。

（5）　ラグランジアンを求めよ。
（6）　z, θ, ϕについてのラグランジュ方程式を求めよ。

（2）　熱・統計力学　（１０点）



図(a) フレンケル欠陥　　図(b) ショットキー欠陥

原子、分子、イオンなどが規則正しく配列している固体を結晶という。ここでは、簡単のため、結晶は原子から構成されているものとする。結晶を構成している原子の規則正しい配列構造を結晶格子、原子が位置する結晶格子中の点を格子点という。実際の結晶は、結晶格子の周期性の様々な乱れが存在する。ここでは、結晶の乱れの１つである点状の欠陥について考える。

図（a）のように、結晶中の原子が格子点から離れて格子点の隙間に入り込む場合を考える。

原子のいない格子点（空格子点）と格子点の隙間にいる原子（格子間原子）の両者をまとめてフレンケル欠陥という。格子点の隙間が狭くて格子間原子が生じにくい場合、空格子点のみが発生し、そこから抜け出した原子は、図（b）のように結晶の表面に移動して結晶の一部となり、結晶格子を構成する。このような欠陥をショットキー欠陥という。

I）フレンケル欠陥について考えよう。

結晶中のフレンケル欠陥の数を n、フレンケル欠陥１個をつくるのに必要なエネルギー（生成エネルギー）を W_F とする。

問１）結晶全体でのフレンケル欠陥の生成エネルギー E を求めよ。

温度が一定の熱平衡状態では、ヘルムホルツの自由エネルギーは最小となる。温度を T、エントロピーを S とするとき、フレンケル欠陥に関する結晶全体のヘルムホルツの自由エネルギー $F(n)$ は次式で与えられる。

$$F(n)=E-TS$$

次に、エントロピー S について考える。ここで、空格子点の数と格子間原子の数は等しく、ともに n に等しいことに注意する。また、結晶中の格子点の数を N、格子の隙間の数を N' とする。

問２）N個ある格子点と N' 個ある格子の隙間の中で、n個のフレンケル欠陥をつくる場合の状態数（配列の仕方の数）Ωが次式で与えられることを示せ。

$$\Omega=\frac{N!\,N'!}{(N-n)!\,(N'-n)!\,(n!)^2}$$

以下では、格子点の数 N、格子の隙間の数 N' 、フレンケル欠陥の数 n は、じゅうぶん大きい数であるとする。

$$N,\ N',\ n>>1$$

問３）状態数ΩからエントロピーSを求めよ。ただし、ボルツマン定数を k_Bとする。
（ここで、xを自然数としてスターリングの公式 $\log x!\simeq x(\log x-1)\quad(x>>1)$ を用いて良い）

問４）ヘルムホルツの自由エネルギー$F(n)$を求めよ。

問５）問４で得られた自由エネルギー$F(n)$を用いて、温度一定の熱平衡状態で、フレンケル欠陥の数 n が次の近似式で表せることを示せ。ただし、$N,\ N'>>n>>1$とする。

$$n\simeq\sqrt{NN'}\exp\left(-\frac{W_F}{2k_BT}\right)$$

II）ショットキー欠陥について考えよう。
ショットキー欠陥が発生する前の格子点の数を N、ショットキー欠陥の数を m、ショットキー欠陥１個をつくるのに必要なエネルギー（生成エネルギー）を W_S とする。

m個のショットキー欠陥が発生した後では、表面に移動した m個の原子は結晶の一部となり、結晶格子の格子点上に配置される。したがって、この場合の格子点の数は $N+m$ となる。

以下では、ショットキー欠陥が発生する前の格子点の数 Nとショットキー欠陥の数 mは、じゅうぶん大きい数であるとする。

$$N,\ m>>1$$

問６）ショットキー欠陥が発生した後でのエントロピーSが次式で与えられることを示せ。
（ここで、xを自然数としてスターリングの公式 $\log x!\simeq x(\log x-1)\quad(x>>1)$ を用いて良い）

$$S=k_B\left\{(N+m)\log(N+m)-N\log N-m\log m\right\}$$

問７）温度一定の熱平衡状態で、ショットキー欠陥の数 mが次の近似式で表せることを示せ。ただし、$N>>m>>1$とする。

$$m\simeq N\exp\left(-\frac{W_S}{k_BT}\right)$$

（３）　電磁気学　（１０点）

原点を中心として半径aの球と半径bの球（$a<b$）に挟まれた部分に電荷が一様に分布しており，それ以外に電荷は存在しない。このとき，z軸上の点P（0,0,d）における電場(E_x, E_y, E_z)を極座標(r,θ,φ)を用いて求めよう。ただし電荷密度をρ，真空の誘電率をε_0とする。

(1) 極座標で書くと$a \le r \le b$の領域に電荷が存在する。この領域において，rと$r+\Delta r$，θと$\theta+\Delta\theta$，φと$\varphi+\Delta\varphi$に囲まれた微小体積(下図)に含まれる電荷の量ΔQを求めよ。

(2) (1)で求めたΔQが点Pにつくる電場の大きさΔEを求めよ。

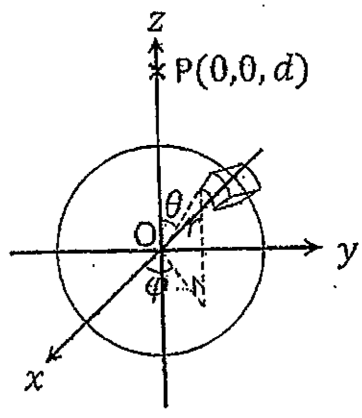
(3) ΔEのz成分$\Delta E_{||}$を求めよ。

(4) $\Delta E_{||}$をθ,φについて積分して，原点を中心として半径rの球と半径$r+\Delta r$の球に挟まれた球殻の電荷が点 P につくる電場のz成分ΔE_zを求めよ。θについて積分する際には，$s=\sqrt{r^2+d^2-2rd\cos\theta}$という置換を用いよ。$d>r, d<r$という二つの場合に分けて考えること。

(5) E_zを求めよ。$d<a$，$a<d<b$，$b<d$という三つの場合に分けて答えること。

(6) E_zをdの関数としてグラフにあらわせ。

(7) E_x, E_yはいくらか。理由とともに述べよ。



（4）　量子力学　（１０点）

以下の問に答えよ。

水素原子について考える。ただし、原子核は原点に静止しているとし，原点からの距離をrとする。また，電気素量を$e(>0)$，ボーア半径をa_0，真空の誘電率をε_0とする。

問 1. 電子が原子核からrだけ離れているとき，この系のハミルトニアンの中で原子核と電子のクーロン相互作用に関する項を書け。

1s電子の動径分布関数R_{10}は, $R_{10} = 2a_0^{-\frac{3}{2}}exp\left(-\frac{r}{a_0}\right)$で与えられる。このとき r と $r+dr$ の間に 1s電子を見出す確率は $r^2{R_{10}}^2dr$ である。

問 2. $r^2{R_{10}}^2$ が極大値になるときの r を求めよ。

問 3. 横軸にr をとり，$r^2{R_{10}}^2$ のグラフの概略をかけ。

問 4. 1s 電子の位置の期待値 $\langle r \rangle$ を求めよ。ただし、1s 電子の波動関数 φ_{1s}は動径分布関数 R_{10} を用いて$\varphi_{1s} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}R_{10}$ で与えられる。積分は座標系に注意すること。また必要であれば積分公式

$$\int_0^{\infty} x^n exp(-bx)dx = \frac{n!}{b^{n+1}}$$

を使ってよい。ここで，n は 0 以上の整数，b は正の定数である。

問 5. 問 2 と問 4 で求めた値を比較し，結果とその原因について論ぜよ。

（5）　小論文　（２０点）

大学で取り組んだ卒業研究，またはそれに相当する内容に関して記述せよ。
ただし，題目，目的，方法，結果，考察，結論，自分で工夫したこと，等を明確に記述すること。

甲南大学大学院
自然科学研究科
物理学専攻