２０２２年度　甲南大学大学院　入試問題

区　分	研究科	専　攻・コース	試験科目	試験時間	試験日
修士一般	自然科学	物理学専攻	専門	１８０分	2022 年 2 月 19 日

注意事項

＊　（１）、（２）、（３）、（４）、（５）の５題全て解答すること。

＊　解答用紙は問題ごとに別々の用紙に解答すること。

＊　問題は　8　頁にわたっているので確かめること。

(1) 力学 （10点）

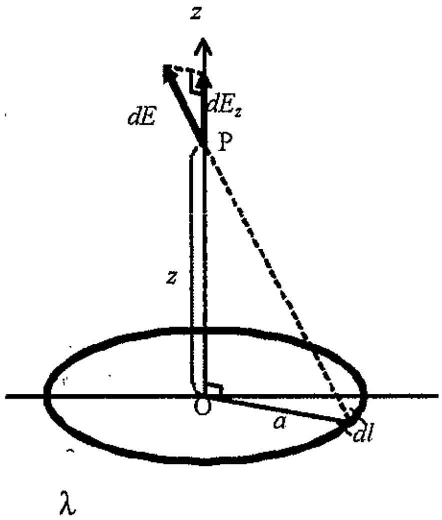
空気中を落下する質量mの球を考える。最初球は静止しており、球が落下を始めた時刻を$t = 0$とする。t秒後の球の速度を$v(t)$とし、球は速度に比例した空気抵抗による力
$f = -\alpha v(t)$を受ける。ただしαは正の定数で、重力加速度の大きさをgとする。以下の問いに答えよ。

問 1. 時刻tの時、球が受ける力$F(t)$を求めよ。
問 2. 球の運動方程式を書け。
問 3. 時刻tでの球の速度$v(t)$を求めよ。
問 4. 球の速度を時間の関数として概略をグラフで示せ。
問 5. 球が十分長い時間落下すると速度は一定になる。この速度を終端速度という。
終端速度を求めよ。
問 6. 時刻tまでに空気が球にした仕事Wを求めよ。

(2) 電磁気学 (10点)

以下の問いに答えよ。

I. 図のように xy 平面上の原点Oを中心とする半径 a の円形導線があり、その導線上に電荷 $+Q$ が一様に分布している。図のように z 軸をとる。



図

1) 導線上の電荷線密度 λ を求めよ。

2) 導線上の微小な長さ dl にある電荷量を求めよ。

3) この微小電荷が z 軸上の点 $P(0, 0, z)$ に作る電場の大きさ dE を求めよ。

4) この微小電荷が z 軸上の点 P に作る電場の z 成分 dE_z を求めよ。

5) 導線上の全電荷が点 P に作る電場の大きさを求めよ。

6) 原点 O を基準として点 P での電位を求めよ。

7) 原点に質量 m、電荷量 $-Q$ の電荷を置いて、それを z 軸にそって微小量動かし、それを離した後、この電荷はどの様な運動をするか。ただし、運動は z 軸にそってのみ行われるとする。

II.　I. と同様の半径 a の円形導線に電流 I が流れている。

8) 導線上の微小な長さを dl として、この電流素片 dI を求めよ。

9) この電流素片が z 軸上の点 P に作る磁束密度の大きさ dB を求めよ。

10) 導線上の全電流が点 P に作る磁束密度の大きさを求めよ。

(3) 熱・統計力学（10点）

以下の設問に答えよ。

質量 m、固有角振動数 ω を持つ独立な2個の1次元調和振動子について考える。この系の内部エネルギーを温度の関数として、量子論的および古典的（前期量子論的）に求めることを考えよう。
ただし、以降は、k_B をボルツマン定数、T を温度、$\hbar = h/2\pi$（h はプランク定数）とする。

I. 量子論的取り扱い

初めに、質量 m、固有角振動数 ω の1個の1次元調和振動子について考える。
量子力学によると、このときの調和振動子のエネルギー $\varepsilon_1(n_1)$ は次式で与えられる。

$$\varepsilon_1(n_1) = \left(n_1 + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \quad (n_1 = 0,1,2,3,\cdots)$$

このとき、この系の分配関数 z_1 は次式で表される。

$$z_1 = \sum_{n_1=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{\varepsilon_1(n_1)}{k_B T}\right) \quad \cdots(1)$$

問1）（1）式を計算することによって、次式が得られることを示せ。

$$z_1 = \frac{\exp\left(-\dfrac{\hbar\omega}{2k_B T}\right)}{1-\exp\left(-\dfrac{\hbar\omega}{k_B T}\right)}$$

次に、質量 m、固有角振動数 ω を持つ独立な2個の1次元調和振動子について考える。
この系の調和振動子の全エネルギー $E(n_1,n_2)$ は次式で与えられる。

$$E(n_1,n_2) = \varepsilon_1(n_1) + \varepsilon_2(n_2)$$
$$\varepsilon_1(n_1) = \left(n_1 + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \quad (n_1 = 0,1,2,3,\cdots), \quad \varepsilon_2(n_2) = \left(n_2 + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \quad (n_2 = 0,1,2,3,\cdots)$$

このとき、この系の分配関数 Z は次式で表される。

$$Z=\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}\exp\left(-\frac{E(n_1,n_2)}{k_BT}\right)\quad\cdots(2)$$

問2）（2）式を計算することによって、分配関数 Z を求めよ。

この系の内部エネルギー U は、分配関数 Z を用いて次式で与えられる。

$$U=-\frac{\partial}{\partial\beta}\log Z\qquad(\beta=\frac{1}{k_BT})$$

問3）この系の内部エネルギー U を求めよ。

II. 古典的（前期量子論的）取り扱い

初めに、質量 m、固有角振動数 ω の１個の１次元調和振動子について考える。

位置を q_1、運動量を p_1 とする。ただし、位置については平衡位置を原点にとるとする。

この系のハミルトニアン $h_1(q_1,p_1)$ は次式で与えられる。

$$h_1(q_1,p_1)=\frac{p_1^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2q_1^2$$

I で量子論的に取り扱った１個の１次元調和振動子のエネルギー $\varepsilon_1(n_1)$ のエネルギー間隔 $\hbar\omega$ が、k_BT に比べてじゅうぶん小さい場合は、前期量子論の考え方を使うことができる。すなわち、(q_1,p_1) で表される２次元平面上で、面積 $2\pi\hbar$ あたり１つの量子状態があるとする。

このとき、分配関数 z_1 は、次式で表される。

$$z_1=\frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{h_1(q_1,p_1)}{k_BT}\right)dq_1\,dp_1\quad\cdots(3)$$

問4）（3）式を計算することによって、次式が得られることを示せ。

ただし、$\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-ax^2)\,dx=\sqrt{\frac{\pi}{a}}$ を用いてもよい。

$$z_1=\frac{k_BT}{\hbar\omega}$$

次に、質量 m、固有角振動数 ω を持つ独立な２個の１次元調和振動子について考える。

この系の調和振動子の全ハミルトニアン $H(q_1,p_1;q_2,p_2)$ は次式で与えられる。

$$H(q_1, p_1; q_2, p_2) = h_1(q_1, p_1) + h_2(q_2, p_2)$$

$$h_1(q_1, p_1) = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q_1^2, \quad h_2(q_2, p_2) = \frac{p_2^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q_2^2$$

この場合、$(q_1, p_1; q_2, p_2)$で表される４次元空間上で、体積$(2\pi\hbar)^2$あたり１つの量子状態があるとする。よって、この系の分配関数Zは次式で表される。

$$Z = \frac{1}{(2\pi\hbar)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{H(q_1, p_1; q_2, p_2)}{k_B T}\right)dq_1\,dp_1\,dq_2\,dp_2 \quad \cdots(4)$$

問５）（４）式を計算することによって、分配関数Zを求めよ。

問６）この系の内部エネルギーUを求めよ。

問７）量子論的に求められた内部エネルギーUに対して、$\hbar\omega / k_B T << 1$と近似することによって、古典的（前期量子論的）に求められた内部エネルギーUが得られることを示せ。

(4) 量子力学（１０点）

$\hat{H} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$という行列で表されるハミルトニアン$\hat{H}$を考える。$i$は虚数単位を表す。以下の問いに答えよ。

問 1 $\hat{H}$のエネルギー固有値が$E_1 = -1$, $E_2 = 1$であり、それに対応する規格化された固有状態が$|\phi_1\rangle = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -i/\sqrt{2} \end{pmatrix}$, $|\phi_2\rangle = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ であることを示せ。

問 2 状態$|\psi\rangle$のエネルギーを測定すると、測定値E_1, E_2がそれぞれ確率$|\langle\phi_1|\psi\rangle|^2$, $|\langle\phi_2|\psi\rangle|^2$で得られる。状態$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} i/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$ のエネルギーを測定したとき、測定値E_1, E_2が得られる確率をそれぞれ求めよ。

問 3 $\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ という行列で表される物理量$\hat{A}$を考える。$\hat{A}$の固有値と、それに対応する規格化された固有状態をすべて求めよ。

問 4 エネルギー固有状態$|\phi_1\rangle$に対して、物理量$\hat{A}$を測定したときの期待値$\langle\phi_1|\hat{A}|\phi_1\rangle$を求めよ。

問 5 状態$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ をエネルギー固有状態$|\phi_1\rangle$, $|\phi_2\rangle$の線形結合で表せ。

問 6 時刻$t = 0$で状態$|\rho(t = 0)\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ にある系が、シュレーディンガー方程式$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\rho(t)\rangle = \hat{H}|\rho(t)\rangle$にしたがって時間発展する。時刻$t$における状態$|\rho(t)\rangle$を求めよ。

問 7 問 6 でもとめた時刻tにおける状態$|\rho(t)\rangle$に対して、$\hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ という行列で表される物理量$\hat{B}$を測定したときの期待値を求めよ。

（5） 小論文（２０点）

大学で取り組んだ卒業研究、またはそれに相当する内容に関して記述せよ。
ただし、題目、目的、方法、結果、考察、結論、自分で工夫したこと、などを明確に記述すること。