２０２２年度　甲南大学大学院　入試問題

区　分	研究科	専　攻・コース	試験科目	試験時間	試験日
修士一般	自然科学	物理学専攻	専門	１８０分	2021 年 9 月 4 日

注意事項

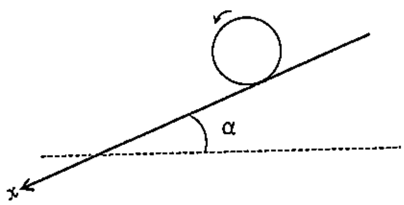
＊　（１）、（２）、（３）、（４）の４題全て解答すること。

＊　解答用紙は問題ごとに別々の用紙に解答すること。

＊　問題は８頁にわたっているので確かめること。

(1) 力学 （２０点）

図のように水平から角度αだけ傾いた斜面に円柱を置き、時刻$t = 0$のときに静かに離した。円柱は斜面を滑らずに転がり落ちた。このとき、円柱は速さに比例した空気抵抗を受け、その比例定数をkとする。斜面は十分長く、円柱の密度は一様で、円柱が斜面を転がった距離をxとする。円柱の半径をa、質量をM、円柱の回転角をθとし、円柱が斜面から受ける摩擦力の大きさをF、重力加速度の大きさをgとする。以下の問いに答えよ。



1） 円柱の慣性モーメントIをもとめよ。

2） 円柱の重心の運動方程式と回転の運動方程式
を書け。

3） xとθの関係を書け。

4） 時刻tの円柱の速さ$\dot{x}$をもとめよ。

5）xをtの関数としてもとめ、縦軸にx、横軸にtをとって概略を図示せよ。

6） 摩擦力Fの力の向きとその根拠を書け。

(2) 電磁気学　（２０点）

以下の問いに答えよ。

I.　図１のように真空中に十分に長い半径 a の円柱内部に電荷が密度 ρ で一様に分布しているとする。真空中の誘電率を ε_0 とする。

1) ガウスの法則を書け。
2) 円柱の中心軸から距離 r での電場の大きさを求めるために、ガウスの法則を適用する閉曲面 S を描け。
3) 円柱内部 ($r<a$) の電場の大きさ $E(r)$ を求めよ。
4) 円柱外部 ($r>a$) の電場の大きさ $E(r)$ を求めよ。
5) 電位の基準を適切に決めて電位 $V(r)$ を求めよ。

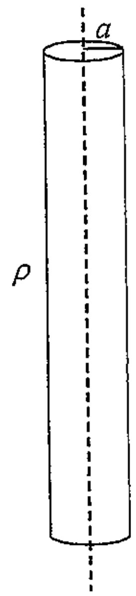


図１

II. 図２のように真空中にある十分に長い半径 a の円柱導線に電流 I （$I>0$）が図の向きに一様に流れているとする。円柱導線の中心軸を含む面上に一辺 b の正方形の一巻きコイルが一辺を中心軸に平行に置かれている。以下ではコイルに流れる電流によって作られる磁場は考えないこととする。真空中の透磁率を μ_0 とする。

6) 円柱導線内に流れる電流密度 j を求めよ。
7) アンペールの法則をかけ。
8) 円柱導線の中心軸から距離 r での磁束密度を求めるためにアンペールの法則を適用する閉曲線Ｃを描け。
9) 円柱導線内部（$r<a$）の磁束密度の大きさ $B(r)$ を求めよ。
10) 円柱導線外部（$r>a$）の磁束密度の大きさ $B(r)$ を求めよ。
11) 図のように円柱導線の中心軸から距離 r （$r>a$）の位置にあるコイルに図のような電流 I' が流れている時、このコイルに働く力の向きと大きさを求めよ。

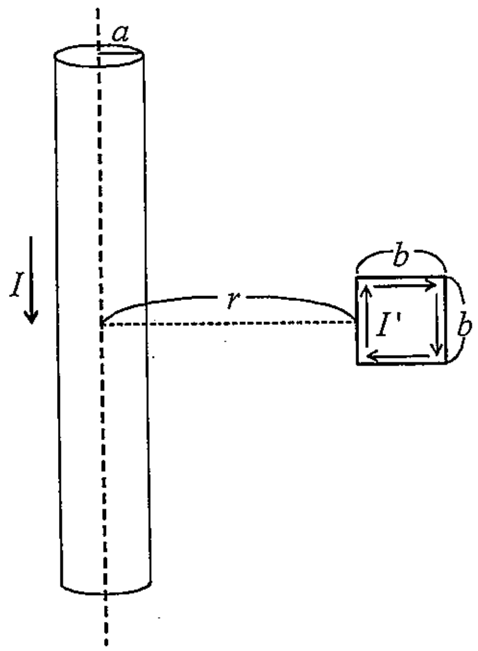


図２

(3) 熱・統計力学　（２０点）

以下の問に答えよ。

I.　$N(>>1)$ 個の粒子が、エネルギーの異なる２つの量子状態を占める２準位系を考える。ここで、２つの量子状態のエネルギーを ε_1、ε_2（$\varepsilon_1 < \varepsilon_2$）とする。また、エネルギーが ε_1、ε_2 にある粒子数をそれぞれ n_1、n_2 とする。ただし、系は熱平衡状態にあり、ミクロカノニカル分布に従うものとする。この系の全エネルギーを E（＝一定）とするとき、次式が成り立つ。

$$N = n_1 + n_2 \quad \cdots(1)$$
$$E = n_1\varepsilon_1 + n_2\varepsilon_2 \quad \cdots(2)$$

１）この系の状態数を W とするとき、W が次式で表されることを示せ。

$$W = \frac{N!}{n_1!\,n_2!}$$

２）この系のエントロピーを S とするとき、スターリングの公式、

（$x>>1$ のとき、$\log x! \simeq x(\log x - 1)$ ）を用いて S が次式で表されることを示せ。

ただし、k_B をボルツマン定数とする。

$$S \simeq k_B(N\log N - n_1\log n_1 - n_2\log n_2) \quad \cdots(3)$$

$\Delta\varepsilon = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$ とおくと、（１）式と（２）式より、

$$n_1 = \frac{N\varepsilon_2 - E}{\Delta\varepsilon}, \quad n_2 = \frac{E - N\varepsilon_1}{\Delta\varepsilon}$$

と表されるので、（３）式は次のようになる。

$$S \simeq k_B\left\{N\log N - \left(\frac{N\varepsilon_2 - E}{\Delta\varepsilon}\right)\log\left(\frac{N\varepsilon_2 - E}{\Delta\varepsilon}\right) - \left(\frac{E - N\varepsilon_1}{\Delta\varepsilon}\right)\log\left(\frac{E - N\varepsilon_1}{\Delta\varepsilon}\right)\right\}$$

エントロピー S のエネルギー E に関する微分は、絶対温度 T の逆数に等しいので

$$\frac{dS}{dE} = \frac{1}{T}$$

3）エネルギーEを絶対温度Tで表すと、次式が得られることを示せ。

$$E = N\frac{\varepsilon_1 \exp\left(-\frac{\varepsilon_1}{k_B T}\right) + \varepsilon_2 \exp\left(-\frac{\varepsilon_2}{k_B T}\right)}{\exp\left(-\frac{\varepsilon_1}{k_B T}\right) + \exp\left(-\frac{\varepsilon_2}{k_B T}\right)}$$

II. $N(>>1)$個の粒子が、エネルギーの異なる２つの量子状態を占める２準位系を考える。ここで、２つの量子状態のエネルギーをε_1、ε_2（$\varepsilon_1 < \varepsilon_2$）とする。また、エネルギーが$\varepsilon_1$、$\varepsilon_2$にある粒子数をそれぞれ$n_1$、$n_2$とする。ただし、系は熱平衡状態にあり、カノニカル分布に従うものとする。

4）この系の１個の粒子に関する分配関数zを求めよ。

5）この系のN個の粒子に関する分配関数Zを求めよ。

6）この系のN個の粒子に関するヘルムホルツの自由エネルギーFが、次式で表されることを示せ。

$$F = -Nk_B T \log\left\{\exp\left(-\frac{\varepsilon_1}{k_B T}\right) + \exp\left(-\frac{\varepsilon_2}{k_B T}\right)\right\}$$

エネルギーEは、ヘルムホルツの自由エネルギーFを用いて次式で表される。

$$E = -T^2 \frac{d}{dT}\left(\frac{F}{T}\right)$$

7）この系の全エネルギーEが、次式で表されることを示せ。

$$E = N\frac{\varepsilon_1 \exp\left(-\frac{\varepsilon_1}{k_B T}\right) + \varepsilon_2 \exp\left(-\frac{\varepsilon_2}{k_B T}\right)}{\exp\left(-\frac{\varepsilon_1}{k_B T}\right) + \exp\left(-\frac{\varepsilon_2}{k_B T}\right)}$$

(4) 量子力学（２０点）

下図のように周長がLの円周上に質量mの粒子があるとする。座標xを円周に沿って$0 \le x \le L$となるようにとる。波動関数$\phi(x)$は境界条件$\phi(0) = \phi(L)$をみたす。

運動量演算子を$\hat{p}$として、ハミルトニアンは$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m}$である。以下の問いに答えよ。

１）波動関数を$\phi(x)$、エネルギー固有値をEとして、時間依存しないシュレディンガー方程式に相当する$\phi(x)$についての微分方程式を書け。

２）1）のシュレディンガー方程式の解は$\phi_n(x) = A\exp(i\frac{2n\pi}{L}x)$（$A$は定数、$n$は整数）の線形結合で表される。エネルギー$E$を、$n$を用いて表せ

３）$\phi_n(x)$が規格化されているとき、定数Aを求めよ。ただしAは正の実数とする。

４）$\phi_n(x)$に対して$\hat{p}$を測定したときの期待値$\langle\hat{p}\rangle$を求めよ。

５）重ね合わせ状態$\psi(x) = \frac{1}{2\sqrt{L}}\cos(\frac{2\pi}{L}x) + B\exp(i\frac{4\pi}{L}x)$（$B$は定数）を考える。$\psi(x)$が規格化されているとき、$B$を求めよ。ただし$B$は正の実数とする。

６）$\psi(x)$に対してxを測定したときの期待値$\langle x\rangle$を求めよ。

７）$\psi(x)$に対してpのゆらぎ（測定値の標準偏差）$\Delta p = \sqrt{\langle\hat{p}^2\rangle - \langle\hat{p}\rangle^2}$を求めよ。

８）波動関数の時間発展$\Phi(t,x)$は、時間依存するシュレディンガー方程式$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,x) = \hat{H}\Phi(t,x)$で記述される。時刻$t = 0$で波動関数が$\phi_n(x)$であるとき、その時間発展$\Phi_n(t,x)$を求めよ。（すなわち$\Phi_n(0,x) = \phi_n(x)$である。）

９）時刻$t = 0$で波動関数が 5）の重ね合わせ状態$\psi(x)$であるとき、その時間発展$\Psi(t,x)$を求めよ。