2023年度　甲南大学大学院　入試問題

区分	研究科	専攻	試験科目	試験時間	試験日
修士一般	自然科学	物理学	専門	180分	2022年9月3日

注意事項

- (1), (2), (3), (4) の4題を全て解答すること。
- 解答用紙は問題ごとに別々の用紙に解答すること。
- 問題は8頁にわたっているので確かめること。

(1) 力学（20点）

I. 図1のように，質量mの質点が質量の無視できる紐につながれており，紐のもう一方の端は原点Oに固定されている系を考える。紐の長さはℓで一定であり，系は重力等の外力が無視できる環境下にあるとする。時刻$t=0$において紐をたるみなく張った状態で，質点を速さv_0で紐と垂直方向に投げたとする。時刻$t=0$での紐に沿った直線と，時刻$t>0$での紐に沿った直線のなす角をθとして以下の問いに答えよ。

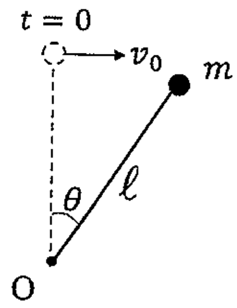

図1:

問1. 質点の速さをℓ,θを用いて書け。

問2. 質点の運動エネルギーを書け。

問3. この環境下では質点のポテンシャルエネルギーは常に0であるので系のラグランジアンは運動エネルギーで与えられる。このときラグランジュ方程式から変数θに関する運動方程式を求めよ。

問4. 前問の運動方程式を積分し，この系の保存量を求めよ。また，この系ではなぜ保存量が存在するのかを一文で答えよ。

II.　図2のように, 質量 m の質点が質量の無視できる紐につながれており, 紐が原点Oを中心とする半径 R の固定された円柱に巻きついている系を考える。時刻 $t=0$ において円柱上の位置Sから動径方向に速さ v_0 で質点に初速を与え, 巻きつきがほどけていく様子を考える。系は重力等の外力が無視できる環境下にあるとする。OとSを結ぶ直線OSと, 時刻 t での紐と円柱の接点とOを結ぶ直線のなす角を θ として以下の質問に答えよ。

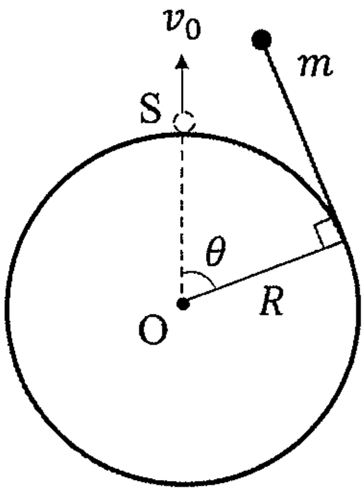

図 2:

問 5. 紐のほどけた部分の長さを R, θ を用いて書け。

問 6. 質点の速さが $v=R\theta\dot{\theta}$ と書けることを説明せよ。

問 7. この系のラグランジアンを書け。

問 8. θ に関する運動方程式を求めよ。

問 9. 前問の運動方程式を解き, θ を t の関数として求めよ。ここで, 初期条件が $v_0=R\theta\dot{\theta}|_{t=0}$ であることを用いよ。

問 10. 質点の原点まわりの角運動量が保存するかどうかをその理由とともに答えよ。

(2) 電磁気学（20点）

I. 真空中に同じ中心軸を持った厚さの無視できる半径 a と b $(a < b)$ の円筒状の二つの導体がある。導体の長さを h として，端の効果は考えないことにする。内側の円筒には電荷 $+Q$, 外側には $-Q$ の電荷を与えた。真空中の誘電率を ε_0 とする。以下の問いに答えよ。

問 1. 電荷の分布と電場の様子を図示せよ。

問 2. 中心軸からの距離 r の位置での電場の大きさを $r < a$, $a < r < b$, $r > b$ の場合についてそれぞれ求めよ。

問 3. これらの導体をコンデンサーとして見たときの電気容量 C を求めよ。

問 4. このコンデンサーが持っているエネルギー $\dfrac{Q^2}{2C}$ が電場のエネルギーと等しいことを示せ。

II. I. と同じ二つの導体の軸方向に同じ大きさ I の電流が内側と外側の円筒で逆向きに流れている。真空中の透磁率を μ_0 とする。

問 5. 電流と磁場の様子を図示せよ。

問 6. 中心軸からの距離 r の位置での磁束密度の大きさを $r < a$, $a < r < b$, $r > b$ の場合についてそれぞれ求めよ。

問 7. 内側と外側の円筒の間の磁束を求めて，この同軸導体の自己インダクタンス L を求めよ。

問 8. この同軸導体が持っているエネルギー $\dfrac{LI^2}{2}$ が磁場のエネルギーと等しいことを示せ。

(3) 熱・統計力学（20点）

温度Tの熱浴に接した体積Vの容器の中に質量mの単原子分子からなる理想気体が封入されている。この気体は容器内で同じ原子からなる固体と熱平衡状態にあり，固体と気体を合わせてN個の原子が容器内にある。この固体の体積は気体の体積に比べて無視できる。またこの系は古典近似で取り扱うことができるものとする。

古典近似では1粒子あたりの分配関数は

$$z = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \iiiint\!\!\iint \exp\left(-\frac{\mathcal{H}_1}{k_B T}\right) dp_x dp_y dp_z dx dy dz$$

と表される。ここで(x, y, z)と(p_x, p_y, p_z)はそれぞれ粒子の位置と運動量を表し、$\mathcal{H}_1$はこの1粒子に関するハミルトニアン，$\hbar$は換算プランク定数，k_Bはボルツマン定数である。

以下の問いに答えよ。ただし必要であれば以下の積分公式を用いよ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (a > 0\text{の時})$$

また必要に応じてスターリングの公式

$$\log M! \simeq M \log M - M \qquad (\text{ただし}\ M\ \text{は}\ M \gg 1\ \text{である整数})$$

を用いよ。

問1. 気体の粒子数をN_gとして封入されている気体の分配関数が

$$Z_g = \frac{1}{N_g!}\left[\frac{(2\pi m k_B T)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} V\right]^{N_g}$$

であることを示せ。ただし気体の粒子は互いに区別できないことに留意すること。

問2. 固体中にある原子は気体中にある時よりもϵ(=定数)だけエネルギーが低いとし，固体を角振動数ωで特徴づけられるアインシュタインモデルで近似すると，固体の1粒子のハミルトニアンは

$$\mathcal{H}_s = -\epsilon + \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} + \frac{m\omega^2(x^2 + y^2 + z^2)}{2}$$

と表される。固体の原子数を N_s として固体の分配関数 Z_s が

$$Z_s = \left(\frac{k_B T}{\hbar\omega}\right)^{3N_s} \exp\left(\frac{N_s \epsilon}{k_B T}\right)$$

と表されることを示せ。

問 3. 全系の分配関数は気体と固体の分配関数の積で表される。全系のヘルムホルツの自由エネルギー F を計算せよ。ただし $N_g \gg 1$ とする。

問 4. F が最小になるように固体と気体の粒子数が決定される。$N = N_g + N_s$ に注意して，極値で成り立つ関係式 $\dfrac{\partial F}{\partial N_g} = 0$ から決まる N_g を求めよ。

問 5. 問 4 で求めた N_g(以下では $N_{g0}(T)$) は数学的にある温度で最大値を持つ。最大値とその時の温度 T を求めよ。

問 6. T の関数として $N_{g0}(T)$ の概略をグラフにあらわせ。

問 7. 気体の粒子数は全系の粒子数を上回ることはできない。問 5 で求めた最大値が N よりも大きく，同じく問 5 で求めた温度よりも系の温度 T が低いとき，容器内が全て気体となる条件をかけ。

(4) 量子力学（20点）

質量 m の粒子が x 軸方向に角振動数 ω で振動している一次元調和振動子がある。固有エネルギーを E，固有関数を $\varphi(x)$ とすると，この系のシュレーディンガー方程式は，

$$\hat{\mathcal{H}}\varphi(x) = E\varphi(x)$$

であり，$\hat{\mathcal{H}} = -\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{d^2}{dx^2} + \dfrac{1}{2}m\omega^2x^2$ である。以下の問いに答えよ。

問 1. 変数 $u = \sqrt{\dfrac{m\omega}{\hbar}}x$ および $\epsilon = \dfrac{2E}{\hbar\omega}$ を用いて，シュレーディンガー方程式を書き直せ。

問 1. の方程式の解は，$\varphi(u) = H_n(u)\exp\left(-\dfrac{u^2}{2}\right)$ となる。ここで，n は正または 0 の整数，$H_n(u)$ はエルミート多項式であり，$H_{n+1}(u) = 2u\,H_n(u) - 2n\,H_{n-1}(u)$ の関係がある．また，$H_0(u) = 1$，$H_1(u) = 2u$ である。

問 2. $H_2(u)$ と $H_3(u)$ を求めよ。

問 3. 問 1. の方程式の解が，$\varphi(u) = (8u^3 - 12u)\exp\left(-\dfrac{u^2}{2}\right)$ であるとき，この方程式の固有値 ε と 1 次元調和振動子の固有エネルギーを求めよ。

以下では，この1次元調和振動子を演算子法を用いて取り扱う。

問4. 位置演算子 $\hat{x}$ と運動量演算子 $\hat{p}$ の交換子 $[\hat{x}, \hat{p}]$ を求めよ。

問5. 消滅演算子 $\hat{a}$ と生成演算子 $\hat{a}^\dagger$ を以下のように定義する。交換子 $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger]$ を求めよ。

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} + \frac{i}{m\omega}\hat{p}\right), \qquad \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} - \frac{i}{m\omega}\hat{p}\right)$$

生成・消滅演算子を導入すると，この系のハミルトニアンは $\hat{\mathcal{H}} = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right)$ と書かれる．また，シュレーディンガー方程式 $\hat{\mathcal{H}}|n\rangle = E_n|n\rangle$ のエネルギー固有値 E_n は，$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$ である。今，この系の状態が，

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|2\rangle$$

であったとする。

問6. この系に対してエネルギーの観測を行った場合，得られるエネルギー値とそのエネルギー値が観測される確率を，すべての場合において求めよ。

問7. エネルギーの期待値 $\langle E\rangle$ を求めよ。

甲南大学大学院
自然科学研究科
物理学専攻