2024年度　甲南大学大学院　入試問題

区分	研究科	専攻	試験科目	試験時間	試験日
修士一般	自然科学	物理学	専門	180分	2023年9月2日

注意事項

＊（１），（２），（３），（４）の４題を全て解答すること。
＊解答用紙は問題ごとに別々の用紙に解答すること。
＊問題は８頁にわたっているので確かめること。

（１）力学（２０点）

図１のように，質量mのおもりが天井から長さlの糸でつり下げられている。糸の長さは変化せず，また，おもりの大きさや糸の質量は無視できるとする。重力加速度の大きさをgとして，１つの鉛直平面内での運動のみを考える。以下の問いに答えよ。

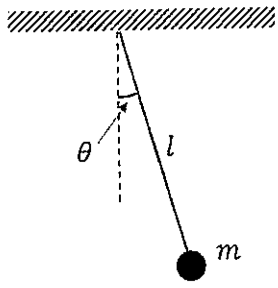

図１

問１　鉛直線と糸のなす角をθとしたとき，系の運動エネルギーをθを用いてかけ。

問２　系のポテンシャルエネルギーをかけ。ただし，位置エネルギーの基準位置を明記すること。

問３　ラグランジュ方程式からおもりの運動方程式を導け。

問４　$\theta \ll 1$であるときの運動方程式を解き，その一般解を求めよ。

次に，図２のように前問と同様の振り子を２つ用意し，互いをバネ定数kのバネで連結した。図で描かれた１つの鉛直平面内での運動を考え，バネの自然長は振り子の支点間の距離に等しいとする。また，$\theta_1, \theta_2 \ll 1$である運動のみを考える。

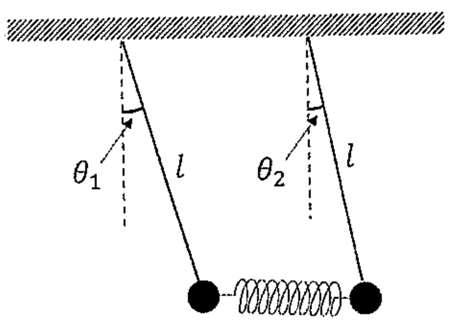

図２

問５　系のラグランジュ関数をかけ。

問６　ラグランジュ方程式からθ_1, θ_2に対する運動方程式を導け。

問７　系の基準振動の振動数を求めよ。

問８　２つの基準振動はどのような振動モードであるか答えよ。

（２） 電磁気学（２０点）

以下の問いに答えよ。ただし，必要な定数や物理量は自分で定義せよ。また，必要と思われる近似を行ってもよい。

I. 真空中に同じ半径を持つ２つの一巻きコイルがある。これらのコイルは同一の中心軸をもち，コイルの半径と同じ距離だけ離れて平行に置かれている。これらのコイルに同じ向きに同じ強さの電流を流した時に，２つのコイルの中間付近の中心軸上での磁場を求めよ。

II. I.で求められた中間付近の磁場は，中心軸上だけでなくその周辺でも一定と見なせる。このことを用いて，電子の比電荷を求める実験方法を考え，式を用いて説明せよ。

（３）熱・統計力学（２０点）

以下の問いに答えよ。

$N(>>1)$個の粒子が，エネルギーの異なる２つの量子状態を占める２準位系を考える。ここで，２つの量子状態のエネルギーをε_1，ε_2とする。また，エネルギーε_1，ε_2にある粒子数をそれぞれn_1，n_2とする。ただし，系は熱平衡状態にあり，ミクロカノニカル分布に従うものとする。この系の全エネルギーをEとするとき，次式が成り立つ。

$$N = n_1 + n_2 \quad \cdots(1)$$
$$E = n_1\varepsilon_1 + n_2\varepsilon_2 \quad \cdots(2)$$

問１　この系の状態数（統計的重率）をWとするとき，Wが次式で表されることを示せ。

$$W = \frac{N!}{n_1!\,n_2!}$$

問２　この系のエントロピーをSとするとき，スターリングの公式（ $\log N! \simeq N(\log N - 1)$ ）を用いてSが次式で表されることを示せ。

$$S = k_B\left\{N(\log N - 1) - n_1(\log n_1 - 1) - n_2(\log n_2 - 1)\right\} \quad \cdots(3)$$

ただし，k_Bをボルツマン定数とする。

この系の全粒子数Nと全エネルギーEは一定である。式(1)と式(2)の条件のもとで，式(3)のエントロピーSが最大となるとき，系は熱平衡状態となる。
式(1)と式(2)の条件のもとで，エントロピーSを最大にするためには，ラグランジュの未定乗数法を用いて，次式が最大となる条件を求めれば良い。

$$\tilde{S} = S - a\,N - b\,E = S - a(n_1 + n_2) - b\,(n_1\varepsilon_1 + n_2\varepsilon_2)$$

ただし，a, bは未定乗数とする。

問３　$\partial\tilde{S}/\partial n_1 = 0$，$\partial\tilde{S}/\partial n_2 = 0$から次式が成り立つことを示せ。

$$n_1 = \exp\left(-\frac{a + b\,\varepsilon_1}{k_B}\right),\quad n_2 = \exp\left(-\frac{a + b\,\varepsilon_2}{k_B}\right)\quad \cdots(4)$$

式(4)で,

$$r = n_2 / n_1 = \exp\left\{-b\,(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)/k_B\right\}$$

とおくと，次式が得られる。

$$n_2 = r\, n_1 \quad \cdots(5)$$

問４　式(5)を式(1)と式(2)に代入すると，次式が得られることを示せ。

$$n_1 = \frac{N}{1+r},\quad E = \frac{N(\varepsilon_1 + r\,\varepsilon_2)}{1+r}\quad \cdots(6)$$

問５　式(5)と式(6)を式(3)式に代入すると，エントロピーSが求められる。Sが次式で与えられることを示せ。

$$S = -Nk_B\left\{\frac{1}{1+r}\log\frac{1}{1+r} + \frac{r}{1+r}\log\frac{r}{1+r}\right\}\quad \cdots(7)$$

エントロピーSのエネルギーEに関する微分は，絶対温度Tの逆数に等しい。すなわち,

$$\frac{dS}{dE} = \frac{1}{T}\quad \cdots(8)$$

問６　式(7)と式(8)から，rを求めることができる。rをε_1, ε_2, k_B, Tのみを用いて表せ。

問７　この系の全エネルギーEが次式で表されることを示せ。

$$E = N\,\frac{\varepsilon_1 \exp(-\varepsilon_1/k_BT) + \varepsilon_2 \exp(-\varepsilon_2/k_BT)}{\exp(-\varepsilon_1/k_BT) + \exp(-\varepsilon_2/k_BT)}$$

（4） 量子力学（２０点）

以下の問いに答えよ。

I.　x 軸上を運動する質量 m の粒子が

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \left(-\dfrac{a}{2} \leq x \leq \dfrac{a}{2}\right) \\ \infty & \left(x < -\dfrac{a}{2}, x > \dfrac{a}{2}\right) \end{cases}$$

のポテンシャル中にあるとき，この粒子のエネルギー固有値と，規格化された固有関数を求めよ。ただし，a は正の定数である。

II.　x 軸上を運動する粒子の量子状態が波動関数

$$\varphi(x) = \begin{cases} 2\alpha\sqrt{\alpha}\; x\; e^{-\alpha x} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

で表される場合を考える。ただし，α は正の定数である。

以下では，必要であれば，積分公式 $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n\, e^{-ax}\, dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$ を用いよ。

(1) この粒子の位置を観測したとき，最も高い確率で見出される x の値を求めよ。

(2) この粒子が $x = 0$ と $x = \dfrac{1}{\alpha}$ の間に見出される確率を求めよ。

(3) x の期待値 $\langle x \rangle$ と，x^2 の期待値 $\langle x^2 \rangle$ を求めよ。

運動量についても同様に，期待値 $\langle p \rangle$ および $\langle p^2 \rangle$ を計算したところ，それぞれ，$\langle p \rangle = 0$ と $\langle p^2 \rangle = \alpha^2\hbar^2$ であった。

(4) 位置の揺らぎ Δx $\left(\equiv \sqrt{\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle}\right)$ を $\langle x \rangle$ と $\langle x^2 \rangle$ を用いて書け。また，運動量の揺らぎ Δp $\left(\equiv \sqrt{\langle (p - \langle p \rangle)^2 \rangle}\right)$ を $\langle p \rangle$ と $\langle p^2 \rangle$ を用いて書け。

(5) $\Delta x\, \Delta p$ は $\hbar$ の何倍か，求めよ。