

2020 年度 甲南大学大学院 入試問題

区分	研究科	専攻	試験科目	試験時間	試験日
修士一般	自然科学	物理学	専門	180 分	2020 年 2 月 15 日

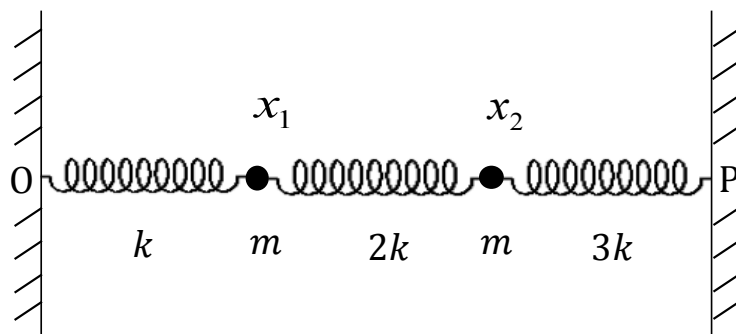
注意事項

- * (1)、(2)、(3)、(4)、(5) の 5 題を全て解答すること。
- * 解答用紙は問題ごとに別々の用紙に解答すること。
- * 問題は 9 頁にわたっているので確かめること。

(1) 力学 (10 点)

図のように両端を固定された 3 本の自然長 a のばねに、2 つのおもりが取り付けられている。ばね定数はそれぞれ左から $k, 2k, 3k$ であり、おもりの質量はともに m である。ばねの左端の固定点を原点 O とし、ばねに沿って右向きに x 軸の正の向きをとる。ばねの右端の固定点 P の x 座標は $3a$ である。おもりは x 軸方向にのみ運動するとして以下の問いに答えよ。

- 問 1 2 つのおもりの座標を x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) として、3 つのばねの長さを、それぞれ x_1, x_2, a の中から必要なものを使って表せ。また、3 つのばねの自然長からの伸びを、それぞれ x_1, x_2, a の中から必要なものを使って表せ。
- 問 2 3 つのばねの全弾性エネルギー U を x_1, x_2, k, a を用いて表せ。
- 問 3 新しい座標を $X_1 = x_1 - a, X_2 = x_2 - 2a$ として、 U を X_1, X_2, k を用いて表せ。
- 問 4 ラグランジアン L を $X_1, X_2, \dot{X}_1, \dot{X}_2, m, k$ を用いて表せ。
- 問 5 この力学系の基準振動数を求めよ。また、振動の様子を図示せよ。



(2) 熱・統計力学 (10 点)

2 種類の気体を混合させる前後でのエントロピーの変化について考える。

以下、気体分子は単原子分子の理想気体で、アボガドロ数程度の個数があるとする。

I. 一辺の長さが L の立方体の容器に閉じ込められた N 個の気体分子を考える。 N 個の分子は、位置ベクトルを $\mathbf{r}$ として、次のポテンシャルエネルギー $U(\mathbf{r})$ によって容器に閉じ込められているとする。

$$U(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0 & (\mathbf{r} \text{ が容器の中}) \\ \infty & (\mathbf{r} \text{ が容器の外}) \end{cases}$$

この系のハミルトニアンは、分子の質量を m 、 j ($1 \leq j \leq N$) 番目の分子の位置ベクトルと運動量をそれぞれ $\mathbf{r}_j$, $\mathbf{p}_j$ とすると、

$$H = \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{\mathbf{p}_j^2}{2m} + U(\mathbf{r}_j) \right\}$$

で与えられる。このとき、 j 番目の分子の分配関数 z_j は、古典統計力学から

$$z_j = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int_{-\infty}^{\infty} dx_j \int_{-\infty}^{\infty} dy_j \int_{-\infty}^{\infty} dz_j \int_{-\infty}^{\infty} dp_{x,j} \int_{-\infty}^{\infty} dp_{y,j} \int_{-\infty}^{\infty} dp_{z,j} \exp \left[-\frac{1}{k_B T} \left\{ \frac{\mathbf{p}_j^2}{2m} + U(\mathbf{r}) \right\} \right] \quad \cdots (1)$$

で与えられる。ただし、 k_B をボルツマン定数、 T を温度とする。

問 1 (1) 式の分配関数 z_j が次式で与えられる事を示せ。

$$z_j = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} (2\pi m k_B T)^{3/2}$$

ただし、 $V = L^3$ とする。また、 a (>0) を定数として、積分公式 $\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(-ax^2) = \sqrt{\pi/a}$ を用いて良い。

この系の分配関数 Z は、以下のように与えられる。

$$Z = \frac{1}{N!} \prod_{j=1}^N z_j \quad \cdots (2)$$

問 2 (2) 式で、分配関数 Z は z_1 から z_N までの積 $\prod_{j=1}^N z_j$ ではなく、 $\prod_{j=1}^N z_j$ を $N!$ で割った式となっている。それはなぜか、物理的意味を述べよ。

(2) 式より、分配関数 Z は次式で与えられる。

$$Z = \frac{1}{N!} \frac{V^N}{(2\pi\hbar)^{3N}} (2\pi m k_B T)^{3N/2} \quad \dots (3)$$

問3 (3)式を用いて、この系のヘルムホルツの自由エネルギー F が次式で与えられる事を示せ。

$$F = -Nk_B T \left[\frac{3}{2} \log \left\{ \frac{2\pi m k_B T}{(2\pi\hbar)^2} \right\} + \log \frac{V}{N} + 1 \right] \quad \dots (4)$$

ここで、スターリングの公式 $\log N! \simeq N(\log N - 1)$ ($N \gg 1$) を用いて良い。

エントロピー S は、ヘルムホルツの自由エネルギー F を用いて、以下のように表される。

$$S = - \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_V \quad \dots (5)$$

問4 (4)式と(5)式を用いて、エントロピー S が次式で与えられる事を示せ。

$$S = Nk_B \left[\frac{3}{2} \log \left\{ \frac{2\pi m k_B T}{(2\pi\hbar)^2} \right\} + \log \frac{V}{N} + \frac{5}{2} \right] \quad \dots (6)$$

II. 質量 m_1, m_2 , 粒子数 N_1, N_2 の分子からなる2種類の気体, 気体1と気体2がある。これらの気体は温度 T と圧力 p が等しく、それぞれの体積は V_1, V_2 , エントロピーは S_1, S_2 である。気体1, 気体2の分配関数 Z_1, Z_2 は、次式で与えられる。

$$Z_1 = \frac{1}{N_1!} \frac{V_1^{N_1}}{(2\pi\hbar)^{3N_1}} (2\pi m_1 k_B T)^{3N_1/2}, \quad Z_2 = \frac{1}{N_2!} \frac{V_2^{N_2}}{(2\pi\hbar)^{3N_2}} (2\pi m_2 k_B T)^{3N_2/2}$$

この気体1と気体2を温度 T と圧力 p が一定の状態に混合した。

問5 このときの気体の体積は $V_1 + V_2$ となる。混合した気体の分配関数 Z_M を求めよ。

問6 混合した気体のエントロピー S_M を求めよ。

問7 混合した気体のエントロピー S_M と混合する前の2種類の気体のエントロピーの和 $S_1 + S_2$ との差 $\Delta S = S_M - (S_1 + S_2)$ が次式で与えられる事を示せ。また、この式から何が言えるか、物理的意味を述べよ。

$$\Delta S = N_1 k_B \log \frac{V_1 + V_2}{V_1} + N_2 k_B \log \frac{V_1 + V_2}{V_2}$$

(3) 電磁気学 (10 点)

I. 図 1 のように真空中に半径 a の導体球 A と、この導体球と同じ中心を持った内側の半径 b 、外側の半径 c ($a < b < c$) の導体球殻 B がある。導体球 A には電荷 $+Q$ ($Q > 0$)、導体球殻 B には $-Q$ の電荷を与えた。真空中の誘電率を ϵ_0 とする。

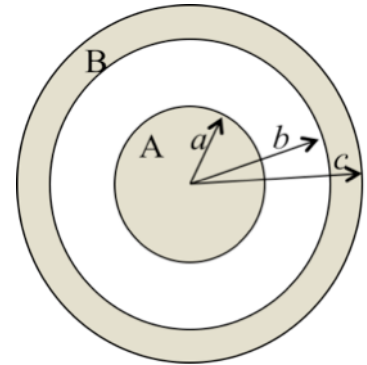


図 1

- 問 1 電荷の分布と電場の様子を図に描け。
問 2 中心からの距離 r の位置での電場の大きさを求めよ。
問 3 導体球 A と導体球殻 B の間の電位差を求めよ。
問 4 導体球 A と導体球殻 B をコンデンサーとして見たときの、電気容量を求めよ。

II. 図 2 のように、真空中に同じ中心軸を持った十分に長く厚さの無視できる半径 a と b の円筒状の二つの導体がある。これらの導体面に、軸方向に同じ大きさ I の電流が逆向きに流れている。真空中の透磁率を μ_0 とする。

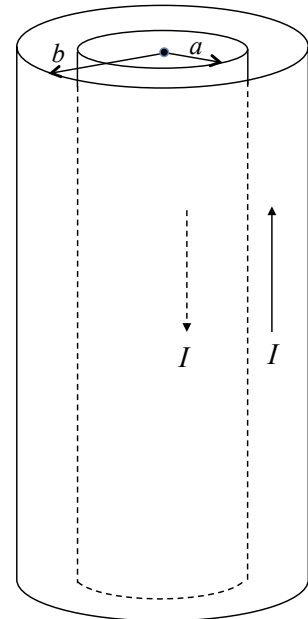


図 2

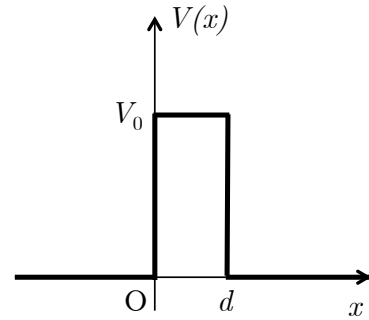
- 問 5 磁場の様子を図に描け。
問 6 中心軸からの距離 r の位置での磁束密度の大きさを求めよ。
問 7 この同軸の導体の単位長さ当たりの自己インダクタンスを求めよ。

(4) 量子力学 (10 点)

以下の問いに答えよ。

位置エネルギー $V(x)$ が

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ V_0 & (0 \leq x \leq d) \\ 0 & (x > d) \end{cases}$$



で与えられる右図に示すような土手型ポテンシャル中を運動する質量 m の粒子を考える。

- 問 1 $x < 0$ の領域におけるシュレディンガー方程式を書け。ただし波動関数を φ , エネルギーを E とせよ。
- 問 2 $\varphi = A \exp(ikx)$ が問 1 の解になっていることを示し, k を E を用いて表せ。
- 問 3 $\varphi = A \exp(ikx)$ が運動量の固有状態になっていることを示し, 運動量固有値を求めよ。
- 問 4 波動関数 φ で与えられる状態に対する確率の流れの密度は次式で求められる。

$$-\frac{i\hbar}{2m} \left(\varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} \varphi \right)$$

$\varphi = A \exp(ikx)$ に対する確率の流れの密度を計算せよ。

$x < 0$ の領域における $\varphi = A \exp(ikx)$ ($k > 0$) の状態は x 軸の負の部分から原点に向かって正の向きに進む波を表す。この波は原点においてポテンシャル障壁にぶつかり, 一部反射され, 一部透過する。反射波を含めると, $x < 0$ の領域の波動関数は $\varphi_- = A \exp(ikx) + B \exp(-ikx)$ と書き表せる。 $x > d$ の領域は透過した波しかないで, 波動関数は $\varphi_+ = C \exp(ikx)$ と書き表せる。

また, 粒子のエネルギー $E < V_0$ のとき, $0 < x < d$ の領域における波動関数は $\varphi_0 = D \exp(\kappa x) + F \exp(-\kappa x)$ と表される。

- 問 5 κ を E, V_0 を用いて表せ。
- 問 6 $x=0, x=d$ における波動関数の連続条件を $A, B, C, D, F, k, \kappa, d$ のうち, 必要なものを用いて書け。
- 問 7 $x=0, x=d$ における波動関数の微分の連続条件を $A, B, C, D, F, k, \kappa, d$ のうち, 必要なものを用いて書け。
- 問 8 問 6, 問 7 の条件式を連立して解くと, 透過率 $T = \left| \frac{C}{A} \right|^2$ が次式のように求まる。

$$T = \left[1 + \frac{V_0^2 \sinh^2 \kappa d}{4E(V_0 - E)} \right]^{-1} \quad \text{ただし, } \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

この式を $\kappa d \gg 1$ の極限で近似せよ。

（５）小論文（20 点）

大学で取り組んだ卒業研究，またはそれに相当する内容に関して記述せよ。
ただし，題目，目的，方法，結果，考察，結論，および自分で工夫したこと，等を明確に記述すること。



甲南大学大学院
自然科学研究科
物理学専攻