2021年度　甲南大学大学院　入試問題

区分	研究科	専攻	試験科目	試験時間	試験日
修士一般	自然科学	物理学	専門	180分	2020年9月5日

注意事項

＊（1）、（2）、（3）、（4）の4題を全て解答すること。
＊解答用紙は問題ごとに別々の用紙に解答すること。
＊問題は8頁にわたっているので確かめること。

（1）力学（２０点）

以下の図のように質量mの人工衛星が円軌道を描いて地球の周りを回っている。人工衛星の地表から高さはHであった。その後、進行方向と逆向きにロケットを噴射して速度を落としたところ、人工衛星の速さはvとなり、地球の重心を焦点の一つとする楕円軌道を描き始めた。このとき、以下の問いに答えよ。ここで地球の半径をR、質量をM、重力定数をGとし、空気抵抗、逆噴射前後での人工衛星の質量の変化は無視する。また、人工衛星の描く楕円の式は、地球の重心から人工衛星までの距離をr、楕円の離心率をε、長軸半径をa、半直弦を$l(=\{1-\varepsilon^2\}a)$、地球の重心と人工衛星を結んだ線と楕円の長軸のなす角度をφとすると、

$$r=\frac{l}{1+\varepsilon\cos\varphi}$$

と書ける。

(1) 逆噴射前の人工衛星の速さを求めよ。

(2) 逆噴射直後の人工衛星の持つ力学的エネルギーを求めよ。

(3) 人工衛星の満たす動径方向と角度方向の運動方程式をそれぞれ求めよ。

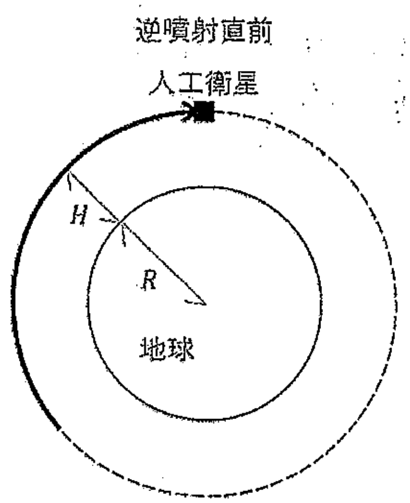
(4) 逆噴射後に人工衛星が地球の重心から距離r、地球の重心と人工衛星を結んだ線と楕円の長軸のなす角度φの位置にあるとき、人工衛星の持つ運動エネルギーとポテンシャルエネルギーをそれぞれ求めよ。

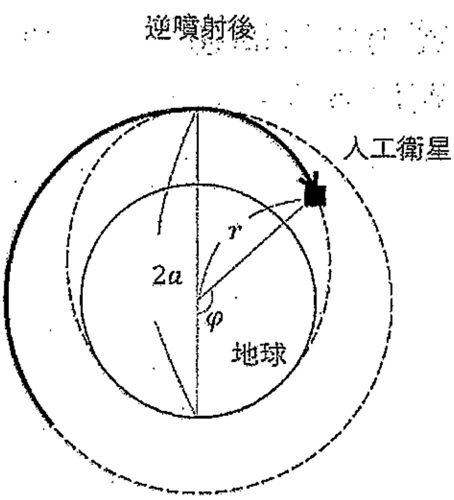
(5) 逆噴射後の人工衛星の面積速度を$\frac{h}{2}$とする。hをR、H、vを用いて書け。

(6) (3)で求めた運動方程式を$u=\frac{1}{r}$とおいて解くことにより、lをG、M、hを用いて書け。

(7) 近日点における力学的エネルギーに注意して、離心率εを求めよ。

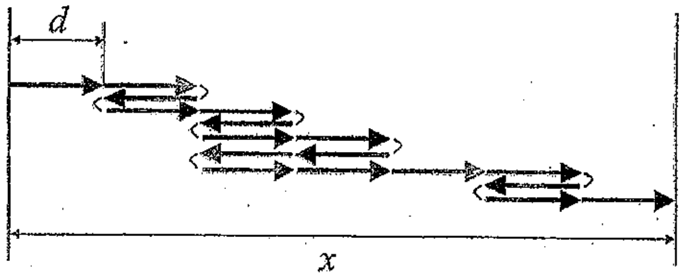
(8) その後、人工衛星が地表に落下した。vの満たす条件を求めよ。





（2）熱・統計力学（２０点）

ゴムは伸び縮みする物質で、高分子が複雑に絡み合ってできている。伸び縮みするゴムの性質を以下に示されるような簡単な１次元モデルで考える。図のように、ゴムは１列に並んだ長さがdの棒状の分子が折り畳まれてできているとする。ゴムを構成している分子の総数をN、ゴムの全長をxとする。左端の分子を右向きの分子とすると、それと連結する分子は、右向きか左向きの２通りしかない。図では、左端から右→右→左→右→・・・のように連結している。ゴムを構成している分子は、自由に向きを変えることができ、右向きと左向きは同じ確率で起きるとする。



問１）右向きの分子の数をN_R個、左向きの分子の数をN_Lとする。

このとき、分子の配列の状態数WをN_RとN_Lを用いて表せ。

問２）N_RとN_LをN、x、dを用いて表せ。

問３）この系のエントロピーSが次式で与えられる事を示せ。ただし、ボルツマン定数をk_Bとする。
（ここで、nを整数としてスターリングの公式 $\log n! \simeq n(\log n - 1)$ $(n >> 1)$ を用いて良い）

$$S = Nk_B\left\{\log 2 - \frac{1}{2}\left(1+\frac{x}{Nd}\right)\log\left(1+\frac{x}{Nd}\right) - \frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{Nd}\right)\log\left(1-\frac{x}{Nd}\right)\right\}$$

この系の内部エネルギーの変化dUは、絶対温度をT、張力の大きさをKとすると、次式で表される。

$$dU = TdS + Kdx$$

右辺第２項は、張力に逆らって変位させたときの内部エネルギーの増加を表す。
ヘルムホルツの自由エネルギーFは、$F = U - TS$であるので、

$$dF = dU - d(TS) = -SdT + Kdx$$

と表される。すなわち、

$$K=\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_T$$

が成り立つ。

また、このモデルの場合、分子が右向きと左向きの場合にエネルギー差が生じないので、$U=0$とおいて良い。

問4）次式が成り立つことを示せ。

$$K=-T\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_T$$

問5）張力の大きさKをN、x、dを用いて表せ。

問6）$x<<Nd$とするとき、次式を示せ。

$$K\simeq\frac{k_BT}{Nd^2}x$$

問6で得られた式は、$x<<Nd$を満たすとき、張力の大きさKが変位に比例するというフックの法則を表す（このモデルでは、自然長を0とみなしてよい）。

問7）このモデルでゴムに張力が生ずるのはなぜか。自由エネルギーの最小原理を用いて説明せよ。

（3） 電磁気学（２０点）

図1のように3次元真空中の半無限領域$-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty, -\infty < z \leq 0$に導体が存在し、接地されているとする。位置$(x, y, z) = (0, 0, d)$ $(d > 0)$に電荷Qを置くと静電誘導によって導体の表面$z = 0$に電荷面密度$\sigma(x, y, 0)$が生じる。導体の内部では電位が一定になっている。真空の誘電率をε_0とする。

問1 $z = 0$近傍の導体外部における電場のx, y成分は0である。一般に導体表面近傍では電場ベクトルは導体表面と垂直になるが、その理由を述べよ。

問2 ガウスの法則を使って、$z = 0$近傍の導体外部における電場のz成分を$\sigma(x, y, 0)$を用いて表せ。

問3 領域$-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty, -\infty < z \leq 0$にある導体を取り除き、代わりに位置$(x, y, z) = (0, 0, -d)$に電荷$-Q$を置く。このとき導体の表面があった場所$(a, b, 0)$における電位を求めよ。

問4 再び導体がある場合を考える。導体表面の場所$(z = 0)$における電位が一定になるように導体を電荷で置き換えても、導体外部の領域$(z \geq 0)$における電場は変わらないことが知られている。静電誘導で生じた導体表面の電荷面密度$\sigma(x, y, 0)$を求めよ。

問5 $\sigma(x, y, 0)$を導体表面全体にわたって積分することで、誘導された全電荷を求めよ。

次に図2のように3次元真空中の領域$x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$に球形の導体が存在し、接地されているとする。$(x, y, z) = (0, 0, d)$ $(d > R > 0)$に電荷Qを置くと静電誘導によって導体の表面$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$に電荷面密度$\sigma(\vartheta, \varphi)$が生じる。ここで電荷面密度は導体表面の位置を$(x, y, z) = (R \sin\vartheta \cos\varphi, R \sin\vartheta \sin\varphi, R \cos\vartheta)$と表示して、$(\vartheta, \varphi)$の関数として表す。

問6 領域$x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$にある導体を取り除き、代わりに位置$(x, y, z) = (0, 0, s)$に電荷qを置く。このとき導体の表面があった場所$(x^2 + y^2 + z^2 = R^2)$の電位が一定になるようなsとqを、d、R、Qを用いて表せ。

問7 再び球形の導体がある場合を考える。静電誘導で生じた導体表面の電荷面密度$\sigma(\vartheta, \varphi)$を求めよ。

問8 $\sigma(\vartheta, \varphi)$を導体表面全体にわたって積分することで、誘導された全電荷を以下の問いに答えよ。ただし、計算上必要であれば、変数として使用する文字を各自定義して用いて良い。

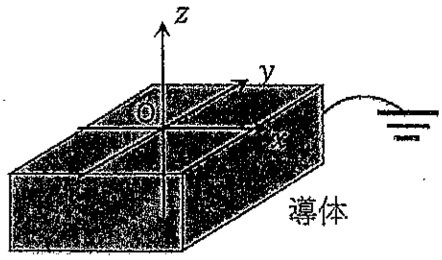


図1

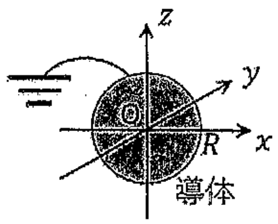


図2

（4）量子力学（２０点）

下の問いに答えよ．

幅 a の無限に深い一次元量子井戸に閉じ込められた質量 m の自由粒子の状態を考える．いま，この粒子は，

$$\varphi_\alpha = \frac{1}{i\sqrt{2}}(\varphi_1 - \varphi_2) \tag{1}$$

の状態にあった．ただし，φ_1 と φ_2 は規格直交条件を満たしているとする．

問１　$\int_0^a \varphi_\alpha^* \, \varphi_\alpha \, dx$ を計算せよ．

以下では，φ_1 と φ_2 がそれぞれ，$\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{a}} \exp\left(i\frac{\pi}{a}x\right)$ および $\varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{a}} \exp\left(-i\frac{\pi}{a}x\right)$ で与えられるとする．

問２　φ_1 と φ_2 が規格直交条件を満たすことを示せ．

問３　φ_1 と φ_2 が運動量の固有関数になっているか固有値方程式を使って調べ，固有関数になっているときにはそれぞれの固有値を求めよ．

問４　式(1)の φ_α に φ_1 と φ_2 の式を代入し，φ_α を三角関数を用いて表せ．

問５　φ_α が運動量の固有関数になっているか固有値方程式を使って調べ，固有関数になっているときには固有値を求めよ．

問６　φ_α について，運動量の期待値を求めよ．

問 7　上の問 3，問 5，問 6 からわかることを 50 文字程度で述べよ．この際，「進行波」と「定在波」という言葉を必ず用いよ．

次に，時刻 $t=0$ での粒子の状態が，

$$\sqrt{\frac{3}{5}}\,\varphi_\alpha+\sqrt{\frac{2}{5}}\,\varphi_\beta \tag{2}$$

であったとする．ただし，$\varphi_\beta=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right)$ である．

問 8　式 (2) で表される状態が井戸の中での自由粒子のハミルトニアンの固有関数になっているか調べ，固有関数になっているときにはエネルギー固有値を求めよ．

問 9　式 (2) で表される状態について，エネルギーの期待値を求めよ．

問 10　式 (2) で表される状態が時間に依存するシュレーディンガー方程式を満たしていることを示せ．

問 11　上の問 8，問 9，問 10 からわかることを 50 文字程度で述べよ．この際，「固有状態」と「非定常状態」という言葉を必ず用いよ．

甲南大学大学院
自然科学研究科
物理学専攻