2024 年度　甲南大学大学院　入試問題

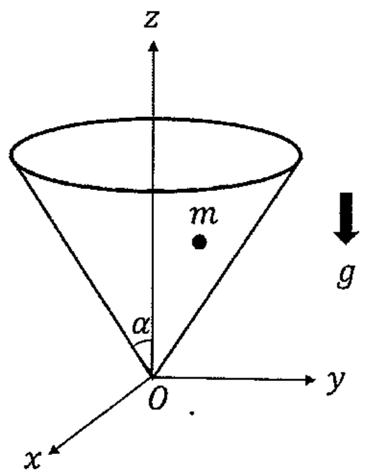
区分	研究科	専攻	試験科目	試験時間	試験日
修士一般	自然科学	物理学	専門	180 分	2024 年 2 月 16 日

注意事項

＊（１），（２），（３），（４），（５）の５題を全て解答すること。
＊解答用紙は問題ごとに別々の用紙に解答すること。
＊問題は　6　頁にわたっているので確かめること。

（1）力学（１０点）

図のような円錐面の内側をすべりながら運動する質量 m の質点を考える。x-y平面は水平面であり、円錐の中心軸は z 軸に一致している。円錐の頂角は 2α であり、頂点は下向きで原点 O にあるとする。重力加速度の大きさを g 、３次元極座標を (r,θ,ϕ)として、以下の問いに答えよ。



(1) 質点の位置座標(x,y,z)を極座標(r,θ,ϕ)を用いてかけ。

(2) 質点の位置座標に課せられた拘束条件をかけ。

(3) (2)の拘束条件のもとで運動する質点の速度をかけ。

(4) 質点の運動エネルギーをかけ。

(5) 質点のポテンシャルを求め、系のラグランジュ関数をかけ。

(6) ラグランジュ方程式をかけ。

(7) ϕに対するラグランジュ方程式から系の保存量を導け。

(8) 質点が一定の動径 r_0 で水平な円周上を回るために必要な角運動量と、運動の周期を求めよ。

（２）電磁気学（１０点）

以下の問いに答えよ。ただし，必要な定数や物理量は自分で定義せよ。

I. マクスウェルの方程式を書いて、その意味を説明せよ。

II. 真空中でのマクスウェルの方程式から波動方程式を求めて、その解の例を示し、その性質を述べよ。

（３）熱・統計力学（１０点）

以下の問いに答えよ。

カノニカル分布に従う N 個の独立な 1 次元の調和振動子を考える。ただし、i（$= 1, 2, \cdots, N$）番目の調和振動子の固有角振動数を ω_i とおく。また、温度を T、ボルツマン定数を k_B とおく。

量子力学によると、固有角振動数が ω_i の調和振動子のエネルギー ε_i は次式で与えられる。

$$\varepsilon_i = \left(n_i + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_i \quad (n_i = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

１）固有角振動数が ω_i の調和振動子の分配関数 z_i が次式で与えられることを示せ。

$$z_i = \frac{\exp\left(-\dfrac{\hbar\omega_i}{2k_BT}\right)}{1-\exp\left(-\dfrac{\hbar\omega_i}{k_BT}\right)}$$

２） N 個の調和振動子の分配関数 Z を求めよ。

３）N 個の調和振動子のヘルムホルツの自由エネルギー $F = -k_BT\ln Z$ が次式で与えられることを示せ。

$$F = \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{1}{2}\hbar\omega_i + k_BT\ln\left\{1-\exp\left(-\frac{\hbar\omega_i}{k_BT}\right)\right\}\right]$$

４） N 個の調和振動子の内部エネルギー $U = -T^2\dfrac{\partial}{\partial T}\left(\dfrac{F}{T}\right)$ が次式で与えられることを示せ。

$$U = \sum_{i=1}^{N}\left\{\frac{1}{2}\hbar\omega_i + \frac{\hbar\omega_i}{\exp\left(\hbar\omega_i/k_BT\right)-1}\right\}$$

５） N個の調和振動子の定積熱容量$C=\left(\dfrac{\partial U}{\partial T}\right)_V$ （Vは系の体積）が次式で与えられることを示せ。

$$C=k_B\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\hbar\omega_i}{k_BT}\right)^2\frac{\exp\left(\hbar\omega_i/k_BT\right)}{\left\{\exp\left(\hbar\omega_i/k_BT\right)-1\right\}^2}$$

６） $k_BT>>\hbar\omega_i\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,N)$の高温近似が成り立つときの定積熱容量$C$を求めよ。

（4） 量子力学（１０点）

以下の問いに答えよ。

x 軸上を運動する質量 m の粒子が

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leq x \leq a) \\ \infty & (x < 0, x > a) \end{cases}$$

のポテンシャル中にある。ただし，a は正の定数とする。

(1)　基底状態でのエネルギー固有値と規格化された固有関数を求めよ。

(2)　第 1 励起状態でのエネルギー固有値と規格化された固有関数を求めよ。

あるとき，この粒子の波動関数 $\varphi(x)$ が

$$\varphi(x) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{1}{a}} & (0 \leq x \leq a) \\ 0 & (x < 0, x > a) \end{cases}$$

で表される状態にあったとする。

(3)　この粒子のエネルギーを測定したとき，測定値が基底状態のエネルギーである確率を計算せよ。また，第 1 励起状態のエネルギーである確率を計算せよ。

（５）小論文（２０点）

大学で取り組んだ卒業研究、またはそれに相当する内容に関して記述せよ。
ただし、題目、目的、方法、結果、自分で工夫したこと、などを明確に記述すること。

甲南大学大学院
自然科学研究科
物理学専攻

甲南大学大学院
自然科学研究科
物理学専攻